数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 65-77

$Sp(2,\mathbb{R})$ の許容表現に対する generalized Bessel function について

宮崎琢也 (Takuya MIYAZAKI) 京大数理研

§0. 代数群 $\mathbb{G}=Sp_{2/\mathbb{Q}}$ とする。$\mathbb{G}(k)$, $k=\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}_p$ ~ $\mathbb{R}$, の既約表現に対して、Whittaker functional の空間（各々の maximal unipotent subgroup の指標から $\mathbb{G}(k)$ 全体への誘導表現への $\mathbb{G}(k)$ 埋め込み）が調べられている。しかし、いずれの場合も、表現によって上の空間が0になってしまうものが存在する。表現論的にはこのような既約表現についても調べるためにより拡張したモデルを考えて、それを研究するのは自然であるし、一たんよい一般化の定義を得れば、その観点から判る表現の性質が浮かび上がり、それらに対して色々研究がなされている様である。いろいろな unipotent subgroup からの誘導表現を、どの k の場合でも統一的に、考察しようという明確化された観点が1つある。この下、$k=\mathbb{F}_p$ の時は、Kawanaka [Ka] (generalized Gelfand-Graev representations, 代数群はいろいろ. Proc. Symp. in Pure Math の 47-1 中の文献も）がある。$k=\mathbb{Q}_p$ の時は、上の $\mathbb{G}$ で、Novodvorsky と Piatetskii-Shapiro [N-P] によって、generalized Bessel models (Siegel parabolic の unipotent radical を考えるもの）の研究がされている。これは Andrianov の spinor L-function [An] との関係も意識されて

いる。$k=\mathbb{R}$の時は、表現論では、M.Hashizume (Lec. in Math., Kyoto Univ., No.14. 1982. 51-73) から H.Matsumoto, H.Yamashita などによる一連の研究がある (Gはいろいろ．一連の論文や数理研講究録)。Siegel保型形式論の方では、S.Niwa [Ni] による generalized Whittaker function の研究がある。[Ni] では Siegel上半空間 $\mathbb{H}_2$ 上の不変微分作用素環の２つの生成元の固有関数となる generalized Whittaker function の積分表示が与えられている。Andrianov の L-function の Γ-因子がこの表示を用いて A. Hori [Ho] によって得られている。

この報告で扱うのは [Ni] と同じモデルである。ここでは、generalized Bessel functions の名でよぶ。目的は $G(\mathbb{R})$ の表現に対するこの関数の積分表示であり、研究の手法から [Ni] で見られなかった問題の明確化とその取り扱いが出来る様になったので、それについて書いておく。(K-fixed vector をもたない表現へのアプローチ) 筆者にとって、このモデルは Siegel保型形式の Fourier 係数のアルキメディアン因子、Andrianov L-function の Γ-因子との関係としての印象が特に強い。

§1. この節では問題にする generalized Bessel functional の定義と、それを表現の各 K-type に制限して考えるという問題の定式化を説明する。

$G = Sp(2,\mathbb{R}) = \{ g \in SL(4,\mathbb{R}) \mid {}^tgJg = J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \}$ とする。Gの Siegel standard maximal parabolic subgroup P_s をとる。$P_s = L_s \ltimes N_s$ をLevi分解とすると unipotent radical N_sはアーベル群。P_sは2つある proper maximal standard parabolicのうちこれで特徴付けられる。今、N_sの指標 $\eta \in \hat{N_s}$を1つとって固定する。P_sのLevi部分群L_sは$\hat{N_s}$に作用するが ($l \in L_s$をとって $\eta \mapsto \eta^l(n) := \eta(lnl^{-1})$ $n \in N_s$)、この作用におけるL_sの中でのηを固定する部分群の単位元を含む連結成分をとり、これを$SO(\eta)$とかく。

$$G \supset P_s = L_s \ltimes N_s.$$

$$L_s = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}, \quad N_s = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_2 & T \\ \hline 0 & 1_2 \end{array} \right) \mid {}^tT = T \right\} \simeq \{ {}^tT = T \}$$

$$\eta : N_s \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \longmapsto \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(h_1t_1 + h_2t_2 + h_3t_3)$$

$$\eta \longleftrightarrow H_\eta = \begin{pmatrix} h_1 & h_3/2 \\ h_3/2 & h_2 \end{pmatrix} \quad : 2\text{次実対称行列}.$$

ηに対して、2次の実対称行列H_ηが定まるが、今これが非退化であると仮定しておく。$SO(\eta)$は定値 or 非定値2次直交群と同型になる。$\mathfrak{so}(\eta) = \langle Y \rangle_{\mathbb{R}}$, $Y = H_\eta^{-1}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$: Lie環は1次元。$SO(\eta)$の character χをさらに1つとって固定。さらにGの部分群Rを $R := SO(\eta) \ltimes N_s$ と定める。χ及びηはそれぞれ自然にRの表現にのばすことが出来 (N_s : abelian unipotent)、それからRの1次元表現 $\chi \otimes \eta$を考える。この時、Gの右表現、

$$\mathrm{Ind}_R^G(\chi \otimes \eta) \qquad (1.1)$$

を考える。表現空間は $C^\infty_{\chi,\eta}(R\backslash G) = \{ f \in C^\infty(G) \mid f(rg) = \chi\otimes\eta(r) f(g) \}$。

これは [Ya1] における reduced generalized Gelfand-Graev representations の1つの場合である。ここでは関係ないが [Ya 1] では non-abelian な maximal parabolic の unipotent radical から出発して同様の対象を考える時に、R の表現をつくるのに必要な方法についての記述もあることを注意しておく。

今、G の Hilbert 表現 (π, H_π) を考える。$K \subset G$ を maximal compact subgroup。以後、話を代数的（Lie 環化）するのに H_π の K-finite vectors のなす C^∞-subspace をとった Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K)$-module を考える。

<u>定義</u>　代数的な generalized Bessel functional の空間を (1.1) の表現を用いて、$(\mathfrak{g}, K)$-modules の homomorphism の空間；

$$W_{\chi,\eta}(\pi) := \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}\left(H_{\pi,K},\ \mathrm{Ind}_R^G(\chi\otimes\eta)\right) \qquad (1.2)$$

で定義する。

与えられた admissible $(\mathfrak{g}, K)$-module についての上の空間の non vanishing や有限次元性、重複度 1 なる性質の研究は、Matsumoto, Yamashita などを参照。

我々の問題は大雑把には、$\Phi \in W_{\chi\eta}(\pi)$ に対して $\{\Phi(v)\}_{v\in H_\pi}$, $\Phi(v) \in C^\infty_{\chi\eta}(R\backslash G)$ を調べることにあるが、このままでは（v というのが抽象的に過ぎて）手がつかないので、(π, H_π) の各 K-type への制限を次の様に考えて問題を定式化する。

$$H_\pi|_K = \widehat{\bigoplus_{\tau\in\widehat{K}}} m_\tau V_\tau \qquad (\tau, V_\tau)\text{：}K\text{の有限次既約表現}$$

で $m_\tau \neq 0$ なる (τ, V_τ) に対して、

$$\Phi(v)(g) = \langle v, \phi_{\tau^*}(g) \rangle_K \qquad {}^\forall v \in V_\tau \qquad (1.3)$$

で $\phi_\tau(g) \in V_{\tau^*}$（$V_\tau$ の反傾表現）を定める。この ϕ_{τ^*} は、

$$\phi_{\tau^*}(rgk) = \chi \otimes \eta(r) \tau^*(k^{-1}) \phi_{\tau^*}(g) \qquad {}^\forall r \in R, {}^\forall k \in K$$

をみたす G 上の C^∞-V_{τ^*}-値関数である。この性質を満たす G 上の V_{τ^*}-valued functions のなす空間を $C^\infty_{\chi,\eta,\tau^*}(R\backslash G/K)$ と書いておく。$\phi_{\tau^*} \in C^\infty_{\chi,\eta,\tau^*}(R\backslash G/K)$. 上の性質と G の元の分解をみると、G の部分群 $A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ 0 & & & a_2^{-1} \end{pmatrix} \middle| \ a_i > 0 \right\}$ とすると ϕ_{τ^*} は A 上の値を決めればよいことが判る。この $\phi_{\tau^*}(a)$, $a \in A$ を ϕ_{τ^*} の A-radial part と呼ぶ。よって我々の問題は、

<u>問題</u>　V_{τ^*} の basis $\{v_k\}_{k=0}^d$ を適当なものにとって固定する時に、ϕ_{τ^*} の A-radial part

$$\phi_{\tau^*}(a) = \sum_{k=0}^{d} W_k(a) v_k, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{pmatrix} \in A$$

$\{W_k(a)\}_{k=0,\dots,d}$ を A 上の関数として表示する。

§2.　上の<u>問題</u>を考えるのに ϕ_{τ^*} が $U(\mathfrak{g})$ のある元に対して、ある式を満たすことを用いて、実際に ϕ_{τ^*} が満たすそして ϕ_{τ^*} を特徴付ける微分方程式系を扱いたい。この為に $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ の生成元，特に Casimir 作用素を利用するというのがまず1つの考えである。さらに今回の報告では、W. Schmid に始まる、Gradient 型の微分作用素 [Ya2] を用いる考察を行う。この方法を用いると、後に見る様に、始めに与えられた表現 (π, H_π)

の性質に応じて融通のきく議論ができるので都合がよい。まず Casimir 作用素 C の方は、H_π に scalar 倍で作用し、$\Phi \in W_{\chi,\eta}(\pi)$ が $(\mathfrak{g},K)$-homomorphism であるから $\Phi(v) \in C^\infty_{\chi,\eta}(R\backslash G)$ にも scalar 倍で作用し、さらに (1.3) の ϕ_{τ^*} の式より $\phi_{\tau^*}(g)$ にもスカラー倍：

$$C\,\phi_{\tau^*}(g) = \lambda_\pi\,\phi_{\tau^*}(g) \quad .$$

λ_π は (π, H_π) のパラメータを用いて記述出来る。実際には、ϕ_{τ^*} の A-radial part を求めるのだから、Casimir 作用素の A-radial part の計算をする必要がある。

§3. 表現の K-type と Shift operator.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解。$\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ は $X = G/K$ の単位元での複素接空間とみなせ、K は Adjoint 作用でこの $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ に作用する。X のエルミート構造として、$\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$: $\mathfrak{p}_\pm$ はそれぞれ K の有限次元表現、の分解をもつ。今、$K \cong U(2)$ の有限次既約表現のパラメトリゼーションを $K_\mathbb{C} = GL_2(\mathbb{C})$ のそれ (dominant integral weights) を用いて作ると、

$$\{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2} \mid l_1 \geq l_2\} \ni (l_1, l_2) \longmapsto \det^{l_2} \otimes \mathrm{Sym}^{l_1 - l_2}(2\text{次元 st}) \in \widehat{K_\mathbb{C}}$$

$l_1 - l_2 + 1$ 次元表現.

この時、$\mathfrak{p}_+ \cong V_{(2,0)}$, $\mathfrak{p}_- \cong V_{(0,-2)}$ （下の (,) が (l_1, l_2)）。

$\{X_i\}$ を Killing form に関する $\mathfrak{p}$ の正規直交基底とする。この時、

$$\nabla = \sum R_{X_i} \otimes X_i \qquad (R_X \text{ は右微分})$$

は、$C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau^*}(R\backslash G/K) \longrightarrow C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau^*\otimes\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}}(R\backslash G/K)$ を定める。$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$の分解より、 $\nabla = \nabla_+ \oplus \nabla_-$:

$$
\begin{aligned}
\nabla_+ : C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau_{(l_1,l_2)}}(R\backslash G/K) \rightarrow\ & C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau_{(l_1+2,l_2)}}(R\backslash G/K) & \xrightarrow{pr^1} \text{第1成分} \\
\oplus\ & C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau_{(l_1+1,l_2+1)}}(R\backslash G/K) & \xrightarrow{pr^2} \text{第2成分} \\
\oplus\ & C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau_{(l_1,l_2+2)}}(R\backslash G/K) & \xrightarrow{pr^3} \text{第3成分}
\end{aligned}
$$

∇_- も同様，なるK-linear mapを得る。H_πがK-type $V_{(l_1,l_2)}$をもつとすると、上の $Pr^{\bullet}\circ\nabla_{\bullet}$ 達をうまく組み合わせると、$C^{\infty}_{\chi,\eta,\tau^*_{(l_1,l_2)}}(R\backslash G/K)$ 上の作用素が出来て、実際に $V^*_{(l_1,l_2)}$ の基底をつかってこの作用が記述出来る。この作用素のradial partを固定した $V^*_{(l_1,l_2)}$ の基底で書き表わしてしまえば、新たな微分方程式を得る．これがbasicなアイデアである。

§4. 今回は次のadmissible $(\mathfrak{g},K)$-modulesを考える。

$P_J \subset G$, $P_J = \left(\{\pm 1\} \times SL_2(\mathbb{R}) \times \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| a>0 \right\}\right) \ltimes N_J$, をGのnon Siegel standard maximal parabolic subgroup。この時、

$$\pi = \mathrm{Ind}_{P_J}^{G}\left((\varepsilon, D_k^+) \otimes \exp(\nu+\rho_J) \otimes 1\!\!1_{N_J} \right),$$

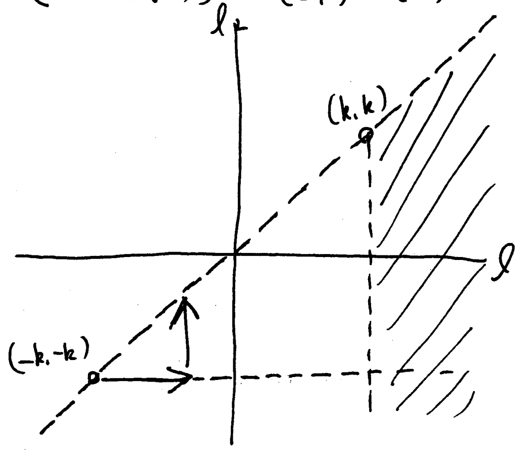
$\varepsilon : \{\pm1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon(\gamma_{2e_1}) = \pm 1$, $\gamma_{2e_1} = \mathrm{diag}(-1,1,-1,1)$. D_k^+は、$SL_2(\mathbb{R})$のdiscrete series $(k>0)$でK-type k以上のもの。

$\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, ρ_Jは $\mathfrak{n}_J$ 内の(root vectors) restrict positive rootsの和の$\frac{1}{2}$.

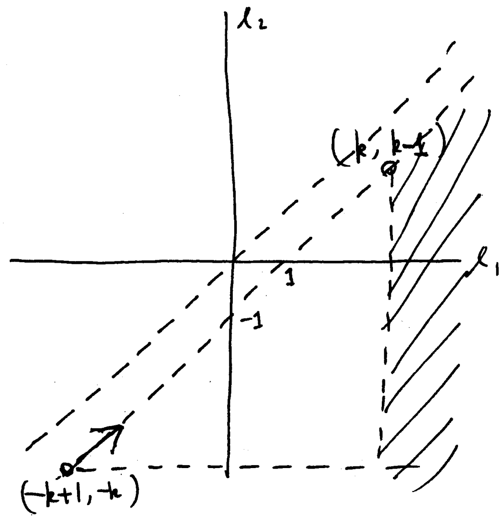
を考える。

これは、Klingen Eisenstein 級数に関する保型表現の無限遠点成分も意識している。さらにこの表現の K-type は下図の斜線部の中の格子点に存在しうる。（誘導表現に対する Frobenius 相互律）

(CASE(A)) $\varepsilon(\gamma_{2e_1}) = (-1)^k$



(CASE(B)) $\varepsilon(\gamma_{2e_1}) = -(-1)^k$



従って、上の様な K-type の分布から、上の表現には K-fixed vector はないことが判り、さらに例えば CASE(A) で MINIMAL K-type $\tau_{(k,k)}$ に関する generalized Bessel function $\phi_{\tau^*_{(k,k)}} = \phi_{\tau_{(-k,-k)}}$ を求めるのに、shift operator で K-type $(-k,-k) \to (-k+2,-k) \to (-k+2,-k+2)$ とやってやると、この作用が 0 でなくてはならない（そこには K-type が存在しないから）ことが使えることが判る。

§5. §4 の表現の場合の結果について次に述べておく。

<u>定理</u> CASE(A). $\pi = \mathrm{Ind}_{P_J}^{G}((\varepsilon, D_k^{\pm}) \otimes \exp(\nu + \rho_J))$ で、

$\varepsilon(\gamma_{2a}) = (-1)^k$ の時。η に対する $H_\eta = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_3 \end{pmatrix} > 0$ とする。

(1) この時、π の MINIMAL K-type $\tau_{(k,k)}$ に対する generalized Bessel functions $\phi_{\tau(-h_1,-h)}$ の A-radial part の満たす微分方程式系は、

$$\phi_{\tau(-h,\tau)}(a) = W(a)\, v_0 \qquad a \in A.$$

$$W(a) = a_1^{k+1} a_2^{k+1} \exp\left(-2\pi(h_1 a_1^2 + h_2 a_2^2)\right) c(a)$$

と書くとき、

(i) $\left\{ \partial_1 \partial_2 - \frac{h_2 a_2^2}{\Delta} \partial_1 + \frac{h_1 a_1^2}{\Delta} \partial_2 - S^2 \right\} c(a) = 0,$

(ii) $\left\{ (\partial_1 + \partial_2)^2 + 2k(\partial_1 + \partial_2) - 8\pi h_1 a_1^2 \partial_1 - 8\pi h_2 a_2^2 \partial_2 - 8\pi \square + k^2 - \nu^2 \right\} c(a)$
$= 0,$

$\Delta = h_1 a_1^2 - h_2 a_2^2, \quad \square = h_1 a_1^2 + h_2 a_2^2, \quad \partial_i = a_i \frac{\partial}{\partial a_i},$

$S = \mu h_1 h_2 \frac{a_1 a_2}{\Delta}, \quad \mu := \chi(\gamma) \in \mathbb{C}.$

((i) は Shift operator から出る式。(ii) は Casimir 作用素から出る式を (i) で modify したもの。)

(2) 上の (i) と (ii) は rank 4 の holonomic system をなし、

(a) $\Delta = 0$ で正則 ($h_1 > 0, h_2 > 0$ より大体単位元 $\in G$ のところで正則)

(b) $\square \to \infty$ につれて $W \to 0$

なる $W(a)$ は一意に定まり、

$W(a) = \text{Const.} \times a_1^{k+1} a_2^{k+1} \times$

$$\times \int_0^\infty t^m J_m(2\pi\sqrt{-1}\,\Delta t)\, {}_2F_1\left[\frac{2-k+2m}{2} + \frac{\nu}{2}, \frac{2-k+2m}{2} - \frac{\nu}{2}; 2m+1; -t\right] \times$$
$$\times \exp(-2\pi\square(t+1))\, dt,$$

で表わされる。ここで $m = |\mu|\frac{t_1 t_2}{4} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ なる0以上の整数で $J_m(z)$ は m-th 第1種 Bessel function, ${}_2F_1$ は Gauss の超幾何関数である。

(3) これはまだ一応(注)であるが、[Ho] に従って、Andrianov の L-function の Γ-因子に関係の深い積分変換を計算しておく。

$m=0$, $t_1=t_2=1$ (i.e. $\mu=0$) の時の W について、

$$\int_0^\infty W(\sqrt{v},\sqrt{v})\, v^{(s-\frac{3}{2})-1}\, dv \qquad \left\{\begin{array}{l} k\in 2\mathbb{Z} \\ \varepsilon(\gamma_{2e_1})=1 \end{array}\right.$$

$$= (4\pi)^{-s-k+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 4^{-\frac{k}{2}-1}\pi^{-(s+k+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{k-1}{4}+\frac{\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{k-1}{4}+\frac{\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{k-1}{4}-\frac{\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{k-1}{4}-\frac{\nu}{4}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times \underbrace{\prod_{n=1}^{\frac{k}{2}} \left\{\left(\frac{s}{2}+\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-n\right)^2-\frac{\nu^2}{16}\right\}}_{\text{polynomial in } s}$$

最後の式の $\pi^{\circ}\times\prod\Gamma\left(\frac{s}{2}\pm\frac{k-1}{4}\pm\frac{\nu}{4}\right)$ の部分は [Ho] の結果に同じであり、これは $\mathrm{Ind}_{P_J}^G \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_{min}}^G$ なる適当の表現の trivial K-type の generalized Bessel model ([Ni]) から得られる Andrianov L-ftn の Γ-因子となっている。MINIMAL K-type $\tau_{(k,k)} \subset \mathrm{Ind}_{P_J}^G$ の trivial K-type からのずれが上の polynomial in s の部分に来ており、それを繰り込んだ2番目の式の分子 $2^{\circ}\times\pi^{\circ}\times$ 分子の Γ がこの場合の

Andrianov L-function の Γ-factor と特に関係すると思われる。(D_k^+ の Harish-Chandra parameter は k-1 であることに注意(今回の記号の使い方で).)

(注) CASE (B) も方程式、積分解表示等得られているが略す。

§6. 具体的な計算について。

① $sp(2,\mathbb{R})$ の Casimir 作用素は

$$C = H_1^2 + H_2^2 - 4H_1 - 2H_2 + 2E_{e_1-e_2}\cdot E_{-e_1+e_2} + 4E_{2e_1}\cdot E_{-2e_1} + 2E_{e_1+e_2}\cdot E_{-e_1-e_2} + 4E_{2e_2}\cdot E_{-2e_2}$$

ここで、 $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$E_{e_1-e_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ & & -1 & \end{array}\right)$, $E_{2e_1} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$, $E_{e_1+e_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$, $E_{2e_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & 1 \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$,

$E_{-*} = {}^tE_*$. $\{E_{e_1-e_2}, E_{2e_1}, E_{e_1+e_2}, E_{2e_2}\}$ は、restricted root system $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$ の positive root vectors であり、maximal nilpotent radical の basis をなす。$\mathfrak{n}_s$ の basis は $\{E_{2e_1}, E_{e_1+e_2}, E_{2e_2}\}$。

② Shift operator について。

$$\nabla = \sum R_{X_i} \otimes X_i$$

$\{X_i\}$ は $\mathfrak{p}$ の Killing form に関する O.N.B. これをもっと表現の K-type に密着した言葉で書き表わす. 即ち、$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ の各 weight vectors ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の compact Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の non compact root vectors) でもって X_i を表わすことをまずやる。次にこの作用素の右微分の部分の A-radial part を求めるのだが、$\mathfrak{n}$ などの表現は restricted root vectors つまり①の $E_{\circ}$ 等についているのだから先の $\mathfrak{p}_{\pm}$ の weight vectors ($\Delta(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{h}_a)$ の root vectors) をこの restricted root vectors 及び H_i

及び $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の元で書き表わすことが必要になる。

$$\nabla^{\pm} = \sum_{\beta} \underset{\substack{\uparrow \\ H_i \text{ や } E_0 \text{ や } \mathfrak{k} \text{ の元でかかれている.}}}{(\text{右微分})} \otimes X^{\pm}_{\beta} \leftarrow$$ Kの表現 $\tau_{\pm}$ の weight vectors (3こある)

あと、$P_r^{\circ}\nabla^{\pm}$ の計算に必要なKの表現のテンソル積 ($\underset{\{v_k\}}{V_{(l_1,l_2)}} \otimes \underset{\{X^{\pm}_{\beta}\}}{\tau_{\pm}}$) をきめられたbasisを用いて分解を記述する必要がある。(Clebsh-Gordan係数) こうした要素については、T. Oda [Od] を参照。

③ Casimir作用素の固有値については、埋込み $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_{min}}^{G}$ をつかって、右辺の表現の性質 (quasi simple) を用いて、そのパラメータをつかって記述する。

④ A-radial part の計算についていくつか。

- $R_{H_1}\phi(a) = \frac{d}{dt}\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1}\end{pmatrix} \exp t\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi\begin{pmatrix} a_1e^{t} & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1}e^{-t} & \\ & & & a_2^{-1}\end{pmatrix}\Big|_{t=0}$

  $= a_1\frac{\partial}{\partial a_1}\phi(a)$ etc.

- $R_{E_{2e_1}}\phi(a) = \frac{d}{dt}\phi(a\exp tE_{2e_1}\, a a^{-1})\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & a_1^2 t & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1\end{array}\right) a\right)\Big|_{t=0}$

  $= 2\pi\sqrt{-1}\, h_1 a_1^2\phi(a)$ etc.

- $R_X\phi(a) = -\tau(X)\phi(a)$ $\quad X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$

- $R_{E_{e_1-e_2}}\phi(a)$ については、generic な $a \in A$ に対して、

$$Ad(a^{-1})Y = \det H^{-1}\left\{\frac{h_3}{2}(H_1 - H_2) + h_2\frac{a_2}{a_1}E_{e_1-e_2} - h_1\frac{a_1}{a_2}E_{-e_1+e_2}\right\}$$

$$= \det H^{-1}\left\{\frac{h_3}{2}(H_1 - H_2) + h_1\frac{a_1}{a_2}(X - \bar{X}) - \frac{h_1a_1^2 - h_2a_2^2}{a_1a_2}\underline{\underline{E_{e_1-e_2}}}\right\}$$

$X = \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & & \end{array}\right)$, $\bar{X} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & \\ & & 1 & \end{array}\right)$ $\quad X, \bar{X} \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

及び、$R_{Ad(a^{-1})Y}\phi(a) = \frac{d}{dt}\phi(a a^{-1}\exp tYa)_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi(\exp tYa)_{t=0} = \chi(Y)\phi(a)$ etc.

Casimir 作用素の A-radial partの計算はもうちょっと頑張るとできる。

References

[An] A.N. Andrianov, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus 2, (English translation), Proc. Steklov Inst. Math. 112 (1971), 70-93.

[Ho] A. Hori, Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two, RIMS preprint 829 (1991), to appear in Math. Ann.

[Ka] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Algebraic Groups and Related Topics, Adv. studies in Pure Math. 6 (1985), 175-206.

[Ni] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya Math. J. 121 (1991), 171-184.

[N-P] M.E. Novodvorsky and I.I. Piatetskii-Shapiro, Generalized Bessel models for the symplectic group of rank 2, (English transl.), Mat. Sb. 19 (2) (1973), 246-274.

[Od] T. Oda, An explicit integral representation of Whittaker functions on Sp(2,ℝ) for the large discrete series representations, Tôhoku Math. J. 46 (1994), 261-279.

[Ya 1] H. Yamashita, Finite multiplicity theorems for induced representations of semisimple Lie groups, I, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 173-211.
——, II, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 383-444

[Ya 2] H. Yamashita, Embedding of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I, Japan J. Math. 16 (1990), 31-95. ——, II, J. Math. Kyoto Univ., 31-1 (1991), 543-571.